

XXIV KONKURS MATEMATYCZNY
im. Prof. J. MARSZAŁA (etap powiatowy)
(7 listopada 2008 r. godz. 10:00 - 12:00)

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS PIERWSZYCH

Zadanie 1.

Dowieść, że prawdziwa jest nierówność $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z .

Zadanie 2

W trójkącie równoramionym ramię jest dwa razy dłuższe od podstawy, zaś suma długości promieni okręgów wpisanego i opisanego na tym trójkącie jest równa 11. Oblicz długość podstawy trójkąta.

Zadanie 3.

Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $\sqrt{8n+3}$ jest niewymierna.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS DRUGICH

Zadanie 1.

Rozwiązać układ równań z niewiadomymi x, y :
$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 133 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$$

Zadanie 2.

W trapez o polu S i kątach wewnętrznych przy dłuższej podstawie o miarach α i 3α wpisano okrąg. Oblicz długość promienia tego okręgu.

Zadanie 3.

Dowieść, że dla wszystkich liczb $x, y, z \geq 0$ zachodzi $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS TRZECICH

Zadanie 1.

Rozwiązać równanie
$$\sqrt[5]{2(1 + \sqrt{x-2})} - x + \sqrt[5]{4(\sqrt{x+1}-1)} - x = \frac{2}{|\cos \pi x|}$$

Zadanie 2.

Liczby dodatnie a, b, c są długościami boków trójkąta i spełniają warunek $ab + bc + ca = 12$. Udowodnij, że $6 \leq a + b + c < 7$.

Zadanie 3.

Wyznacz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{\sqrt{x^2+1}+x} + \sqrt{\sqrt{x^2+1}-x})$.