XV Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

Poziom I

(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów)

Etap rejonowy

28 marca 2015, godzina 10.00 (150 minut)

1) Sprawdź, czy rozwiązaniem równania jest liczba wymierna:
$$\left(\frac{x}{12+\sqrt{145}}-\frac{1}{6+\sqrt{37}}\right)+\left(\frac{x}{\sqrt{145}+\sqrt{146}}-\frac{1}{\sqrt{37}+\sqrt{38}}\right)+\ldots+\left(\frac{x}{\sqrt{168}+13}-\frac{1}{\sqrt{60}+\sqrt{61}}\right)=6.$$

2) W trapezie opisanym na okręgu długości boków nierównoległych wynoszą 3 cm i 5 cm. Odcinek łączący środki ramion trapezu dzieli ten trapez na czworokąty, których stosunek pól wynosi 5:11. Oblicz długości podstaw tego trapezu.

3) W trójkącie ABC dane są: kąt przy wierzchołku $|\sphericalangle C| = 60^\circ$, kąt przy wierzchołku $|\sphericalangle B| = 45^\circ$ oraz bok BC długości a. Z wierzchołka C poprowadzono wysokość CD, a punkt D połączono odcinkiem ze środkiem E boku BC. Oblicz miarę kąta <EDC oraz wysokość trójkąta DBE, opuszczoną na bok DB.

4) Sprawdź (bez obliczania potęg), czy liczba: $\dfrac{512^2+32\cdot 10^5+25^5}{64^2+4\cdot 6^5+9^5}$ jest kwadratem liczby naturalnej.

5) Wyznacz wszystkie dzielniki liczby naturalnej, o której wiadomo, że: dzieląc tę liczbę naturalną przez 17 otrzymujemy iloraz m i resztę 16; dzieląc tę samą liczbę przez 18 otrzymujemy iloraz równy poprzedniej reszcie oraz resztę równą poprzedniemu ilorazowi m.

Powodzenia!

XV Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

Poziom II

(klasy drugie liceum i trzecie technikum z r. szk. 2013/2014)

Etap rejonowy

28 marca 2015, godzina 10.00

(150 minut)

1. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c spełniających warunek $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=3$, prawdziwa jest nierówność: $ab+bc+ac\geq 3$.

2. Dany jest czworokąt ABCD wpisany w okrąg. Dwusieczne dwóch przeciwległych kątów tego czworokąta przecięły ten okrąg w punktach E i F. Wykaż, że odcinek EF jest średnicą tego okręgu.

3. Niech x i y będą liczbami całkowitymi. Udowodnij, że jeżeli liczba 23x + 3y jest podzielna przez 37, to 3x + 2y również dzieli się przez 37.

4. Odcinek łączący środki ramion trapezu rozcina ten trapez na dwie figury, z których jedna ma pole 11 cm^2, a druga 7 cm^2. Oblicz pola figur, na które rozcina ten trapez jego przekątna.

5. Wykaż, że jeżeli wielomian $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ma dwa pierwiastki będące liczbami przeciwnymi, to $ad = bc$.

Powodzenia!