

XII Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

Poziom I

(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów z r. szk. 2011/2012)

Etap rejonowy

24 marzec 2012 r., godzina 10.00 (150 minut)

1. Wędkarz złowił dużą rybę: „Ogon ważył 6 razy mniej niż głowa z tułowiem. Gdyby tułów był o 6 kg cięższy, to głowa z tułowiem ważyłaby 10 razy więcej niż ogon. Różnica wag tułowia i głowy była 3,5 razy większa niż waga ogona.” Ile ważyła ta ryba?
2. Oblicz wartość wyrażenia W , nie wykonując potęgowania pod pierwiastkiem:
$$W = \sqrt{2001^2 + 2001^2 \cdot 2002^2 + 2002^2}.$$
3. Udowodnij, że jeżeli $a = x + y$, $b = x^2 + y^2$, $c = x^3 + y^3$, to $a^3 = 3ab - 2c$.
4. Dany jest trójkąt o wierzchołkach A, B, C , w którym długości odpowiednich boków są równe a, b, c . Wierzchołek C tego trójkąta rzutowano pod kątem prostym na dwusieczne kątów zewnętrznych przy wierzchołkach A i B , otrzymując w ten sposób punkty M i N . Oblicz długość odcinka MN .
(Kąt zewnętrzny trójkąta to kąt przyległy do kąta wewnętrznego.)
5. Oblicz pole trapezu równoramienne, którego wysokość wynosi 14cm, wiedząc, że jego przekątne przecinają się pod kątem prostym i dzielą się w stosunku 2 : 5.

Powodzenia!

XII Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

Poziom II

(klasy drugie liceum i trzecie technikum z r. szk. 2011/2012)

Etap rejonowy

24 marzec 2012 r., godzina 10.00 (150 minut)

1. Wykaż, że: $\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} - \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} - \sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}} = 0$.
2. Wyznacz a i b , tak aby były one równocześnie pierwiastkami dwukrotnymi wielomianu: $W(x) = x^4 + 2ax^3 + 3(b + 1)x^2 - 4x + 4$.
3. Dowieść, że jeśli n jest liczbą całkowitą, to $\frac{n^5}{120} - \frac{n^3}{24} + \frac{n}{30}$ jest też liczbą całkowitą.
4. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c spełniających warunek $a + b + c = \sqrt{3}$, prawdziwa jest nierówność: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt{3}$.
5. W kwadracie o polu 20 dwa wierzchołki jednego z boków połączono ze środkiem przeciwległego boku, otrzymując trójkąt równoramienny. Następnie dwa wierzchołki sąsiedniego boku połączono ze środkiem przeciwległego boku, otrzymując również trójkąt równoramienny. Oblicz pole części wspólnej tych trójkątów.

Powodzenia!