

VIII Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom I
(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów)
Etap rejonowy
10 maja 2008, godzina 10.00 (150 minut)

1. W trapezie, którego podstawy mają długości a i b ($a > b$), suma miar kątów wewnętrznych przy podstawie długości a wynosi 90° . Oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.
2. Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności: $|a - b| \geq |c|$, $|b - c| \geq |a|$, $|c - a| \geq |b|$, to $(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) = 0$.
3. Wykaż, że liczba $5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{299} + 5^{300}$ jest podzielna przez 30.
4. Przedstaw wyrażenie $2 \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$ w postaci sumy dwóch liczb niewymiernych.
5. W czworokącie wypukłym ABCD, kąt BAC ma miarę 20° , kąt BCA ma miarę 35° , kąt BDC ma miarę 40° , kąt BDA ma miarę 70° . Znajdź miarę kąta między przekątnymi tego czworokąta.

Powodzenia!

VIII Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom II
(klasy drugie liceum i trzecie technikum)
Etap rejonowy
10 maja 2008, godzina 10.00
(150 minut)

1. Wykaż, że jeżeli wielomian $W(x) = x^4 + ax + b$ ma pierwiastek dwukrotny, to $27a^4 = 256b^3$.
2. Udowodnij, że dla każdego n nieparzystego liczba $n^3 + 3n^2 - n - 3$ jest podzielna przez 48.
3. Z wierzchołka rozwartego rombu poprowadzono dwie wysokości. Długość wysokości jest równa h , a odległość między spodkami tych wysokości jest równa d . Oblicz pole tego rombu.
4. Określ liczbę rozwiązań układu $\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ w zależności od parametru a .
5. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d, e, f zachodzi nierówność $(a^2 + b^2 + c^2)(d^2 + e^2 + f^2) \geq (ad + be + cf)^2$.

Powodzenia!