Klucz, czy wytrych?

Zbiór wybranych, autorskich zestawów powtórzeniowych przed maturą z matematyki.

WSTĘP.

Uczenie się rzadko bywa czynnością lubianą, charakterystyczne jest to, że wraz z wiekiem jest to czynność coraz mniej lubiana. Inaczej jest gdy dziedzina, w której chcemy się rozwijać znajduje się w kręgu naszych zainteresowań.

Zwiększenie skuteczności uczenia się zależy od kilku podstawowych czynników:

- *motywacji do nauki* – cel jaki chcemy osiągnąć poświęcając swój czas i zaangażowanie,
- *pozytywnego nastawienia do procesu uczenia się* – ważne, bo zmniejsza napięcie organizmu, niweluje skutki stresu, może być wywoływane świadomie poprzez sprawianie sobie drobnych przyjemności, ćwiczenia fizyczne, itp.,
- *zainteresowania przedmiotem, dziedziną* – sprawia przyjemność, wpływa na większe skupienie uwagi, motywuje, sprzyja zrozumieniu materiału i zwiększa skuteczność zapamiętywania,
- *skupienie uwagi, koncentracji* – zwiększa skuteczność zapamiętywania, jeśli do tego włączymy pozytywne emocje oraz działanie, staje się ono bardzo wysokie,
- *zrozumienia materiału* – wskazany jest podział materiału na części, mniejsze porcje, istnieją różne podejścia i techniki uczenia się, np. zaczynamy od opanowania prostych informacji, przechodzimy do trudniejszych, które następnie przeplatamy prostymi,
- *indywidualnego podejścia do sposobu uczenia się oraz rytmów psycho-fizycznych osoby* – warto próbować różnych sposobów uczenia się, aby poznać swoje preferencje, należy pamiętać również o dbaniu o dobre samopoczucie fizyczne i emocjonalne,
- *miejsca nauki* – najczęściej wydzielone biurko, wygodne krzesło umożliwiające utrzymanie kręgosłupa w wyprostowanej pozycji,
- *czasu pracy oraz odpoczynku* – praca powinna być podzielona przerwami umożliwiającymi chwilę odpoczynku od długotrwałego skupienia uwagi,
- *systematyczności* – planujemy rozsądnie czas w którym chcemy opanować materiał, uczymy się systematycznie, dajemy się „uleżeć" wiedzy, powtarzamy, rozszerzamy,
- *sposobów i technik pracy* – różnorodność sposobów i technik nauczania jest wiele, niektóre różnią się znacząco od siebie podejściem, możliwościami, stosowanymi narzędziami, pomocami, warto stosować różne dostosowane do rodzaju zdobywanej wiedzy, czy umiejętności,
- *zapamiętywania oraz powtarzania materiału* – bez powtarzania materiału w określonych cyklach czasowych, zdobywana wiedza jest krótkotrwała i w związku z tym mało efektywna.[1]

[1] https://www.zspnietazkowo.pl/publikacje/pedagog/ [dostęp z dnia 17.05.2023 r.]

Niniejszy materiał powstał w wyniku działania sieci współpracy doradcy metodycznego Joanny Kozubal przy wsparciu nauczycieli matematyki szkół ponadpodstawowych w przygotowaniach uczniów do egzaminu maturalnego w nowej formule od 2023 roku. Tytuł „Klucz, czy wytrych?" nawiązuje do właściwego wyboru metod i technik skutecznego uczenia się spośród między innymi tych, które opisuje Radek Kotarski w swojej książce „Włam się do mózgu".

Uczestnicy starali się odpowiedzieć na pytania w jaki sposób przekazywać młodzieży wiedzę, jakie czynniki pozytywnie wpływają na zwiększenie zainteresowania przedmiotem, jakie techniki skutecznego uczenia się przynoszą najlepsze efekty pracy. Wybrane techniki skutecznego uczenia się przedstawione zostały w prezentacji dostępnej pod linkiem: https://www.canva.com/design/DAFbJt5akgI/pMJIpdt6H27dIhKGpyW2eg/edit?utm_content=DAFbJt5akgI&utm_campaign=designshare&utm_medium=link2&utm_source=sharebutton wykonanej w aplikacji Canva. Na bazie własnych doświadczeń i wniosków powstały zestawy powtórzeniowe wraz z opisem wymagań egzaminacyjnych, które przedstawiamy w niniejszej publikacji. Udostępniamy również linki do materiałów interaktywnych przygotowanych w aplikacjach Genialy oraz Liveworksheets.

Autorkami materiałów obejmujących *funkcje i ich własności, geometrię analityczną, wartość bezwzględną oraz punkty i odcinki w trójkątach, tw. o dwusiecznej kąta w trójkącie* są:

- mgr Joanna Kozubal – edukator, doradca metodyczny, zastępca przewodniczącego Oddziału Podkarpackiego SNM, nauczyciel matematyki, egzaminator egzaminu maturalnego z matematyki oraz egzaminu ósmoklasisty OKE w Krakowie,
- mgr Monika Wyczarska – nauczyciel matematyki w I Liceum Ogólnokształcącym im. H. Sienkiewicza w Łańcucie, egzaminator egzaminu maturalnego z matematyki OKE w Krakowie,
- mgr Halina Konkol – nauczyciel matematyki i fizyki w Zespole Szkół Energetycznych w Rzeszowie, egzaminator OKE egzaminu maturalnego z fizyki,
- mgr Anna Wyczarska - nauczyciel matematyki w Zespole Szkół Technicznych w Łańcucie, egzaminator egzaminu maturalnego z matematyki OKE w Krakowie.

Przygotowanie do egzaminu maturalnego z matematyki w formule 2023 Geometria analityczna.

Wymagania egzaminacyjne na III etapie edukacyjnym w latach 2023/2024 na podstawie Aneksu do informatora o egzaminie maturalnym w formule 2023 i 2024 z dnia 13 czerwca 2022 r. z aktualizacją 26 sierpnia 2022 r.

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Poziom podstawowy. Zdający:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;
2) posługuje się równaniem prostej na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak np. przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość, prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu);
3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;
4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$;
5) oblicza odległość punktu od prostej;
6) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

Poziom rozszerzony. Zdający spełnia wymagania określone dla poziomu podstawowego, a ponadto:

1) posługuje się równaniem prostej w postaci ogólnej na płaszczyźnie, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu);
2) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość;
3) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej.

Geometria analityczna – test

1. Punkty $A(6,-4)$, $B(-1,-3)$ są sąsiednimi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Przekątna tego kwadratu ma długość:

A. $\sqrt{74}$ B. $5\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{37}$ D. 10

2. Punkty $A(5,-4)$, $B(1,-6)$ są sąsiednimi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Obwód tego kwadratu ma długość:

A. $\sqrt{80}$ B. $4+5\sqrt{2}$ C. $6\sqrt{5}$ D. $\sqrt{320}$

3. Prosta k przechodzi przez punkty $P(4,-3), R(6-m, 2m-1), S(-8,3)$. Wtedy wartość m jest równa:

A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

4. Okrąg o promieniu 5 i środku w punkcie $S(-7,4)$ jest styczny do prostej o równaniu:

A. $x=-3$ B. $y=0$ C. $y=9$ D. $x=9$

5. Na okręgu o środku $S=(3,-2)$ leży punkt $A(-1,-4)$. Średnica tego okręgu wynosi:

A. $2\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $4\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{5}$

6. Prosta o równaniu $y=3x$ jest równoległa do prostej:

A. $y=-3x+3$ B. $y=\frac{1}{3}x+3$ C. $y=3x+\frac{1}{3}$ D. $y=-\frac{1}{3}x-3$

7. Prostą prostopadłą do prostej $y=3x-5$ przechodzącą przez początek układu współrzędnych, można opisać równaniem:

A. $y=-\frac{1}{3}x$ B. $y=-\frac{1}{3}x+5$ C. $y=\frac{1}{5}x$ D. $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}$

8. Odległość między punktem $P(2027,2028)$, a jego obrazem w symetrii osiowej względem osi OX jest równa:

A. 2027 B. 2028 C. 4056 D. 4054

9. Dany jest odcinek PR, gdzie $P(3,-5)$, R(-7,3). Obrazem odcinka PR w symetrii względem osi OX jest odcinek $P'R'$. Środek odcinka $P'R'$ ma współrzędne:

A. $(-5,4)$ B. $(-2,1)$ C. $(2,-1)$ D. $(-2,-1)$

10. Wykres funkcji $f(x)=3x-11$ jest równoległy do wykresu funkcji liniowej g, przechodzącego przez punkt $A\ (2,-2)$. Wzór funkcji g ma postać:

A. $g(x)=3x-20$ B. $g(x)=3x-5$ C. $g(x)=3x-8$ D. $g(x)=3x-3$

11. Prosta o równaniu $y = ax + b$ przechodzi przez punkt $A(-3,-5)$ i jest prostopadła do prostej opisanej równaniem $3x + 6y - 2 = 0$. Wówczas:
A. $a = 2, b = 1$ B. $a = 2, b = -1$ C. $a = 2, b = -3$ D. $a = 2, b = 3$

12. Dwie proste o równaniach $y = 3, y = 7$ są styczne do okręgu o środku w punkcie $O(5, k - 2)$. Wtedy k jest równe:
A. 1 B. -1 C. 5 D. 7

13. Wektory $\vec{u} = [3, -4]$ oraz $\vec{v} = [2a - 1, a^2 - 8]$ są równe. Zatem a jest równe:
A. 1 B. -1 C. 2 D. $-0{,}5$

14. Okrąg o środku w punkcie $S(-2,7)$ i styczny do osi OY ma równanie:
A. $(x - 2)^2 + (y - 7)^2 = 2^2$ B. $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 4$
C. $(x + 2)^2 + (y - 7)^2 = 4$ D. $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$

15. Okrąg styczny do osi OX w punkcie $A(-4,0)$ i promieniu $r = 5$ można opisać równaniem
A. $(x + 4)^2 + (y + 5)^2 = 25$ B. $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 5^2$
C. $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 5$ D. $(x + 4)^2 + y^2 = 25$

16. Punkt $P(-2,-3)$ należy do wykresu funkcji o równaniu $(2m - 5)x - y + 1 = 0$. Wówczas parametr m jest równy:
A. $-3{,}5$ B. $-1{,}5$ C. $1{,}5$ D. $3{,}5$

17. Funkcja $f(x) = (3m + 5)x - 1$ przyjmuje wartość -9 dla argumentu 4. Wówczas wartość m wynosi:
A. $\frac{-7}{3}$ B. $\frac{-7}{6}$ C. $\frac{50}{27}$ D. 12

18. Odległość między prostymi równoległymi o równaniach $3x - 4y + 7 = 0$ oraz $3x-4y-5=0$ jest równa:
A. 12 B. 6 C. 3 D. 2,4

19. Odległość punktu $P(-3,2)$ od prostej $y = \frac{4}{3}x - 10\frac{2}{3}$ jest:
A. liczbą niewymierną; B. kwadratem liczby naturalnej;
C. liczbą naturalną podzielną przez 3; D. iloczynem dwóch liczb pierwszych;

20. Wektory $\vec{u} = [a, a-3]$, $\vec{v} = [2,5]$, są przeciwne, tylko wtedy gdy:
A. $a = -2$ B. $a = 0$ C. $a = 1$ D. $a = 2$

21. Środek ciężkości trójkąta ABC, gdzie $A(-2,7), B(3,-4), C(5,9)$ ma współrzędne:
A. $(2,4)$ B. $(3,6)$ C. $(4,2)$ D. $(6,3)$

22. Okrąg o równaniu $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 2$ przesunięto o wektor $\vec{v}$ i otrzymano okrąg o równaniu $(x+6)^2 + (y-4)^2 = 2$. Wobec tego wektor $\vec{v}$ ma współrzędne:
A. $[-2,3]$ B. $[4,-3]$ C. $[-4,3]$ D. $[2,-3]$

23. Dana jest prosta $k: x + y - 4 = 0$ oraz okrąg $o: x^2 + y^2 = 8$. Wskaż zdanie prawdziwe określające wzajemne położenie prostej k i okręgu o:

A. prosta jest rozłączna z okręgiem B. prosta jest styczna do okręgu

C. prosta jest sieczną okręgu D. prosta przechodzi przez środek okręgu

24. Dane są wektory $\vec{u} = [10,-2]$, $\vec{v} = [2,-4]$. Długość wektora $\vec{u} - \vec{v}$ jest równa:
A. 1 B. $2\sqrt{15}$ C. $2\sqrt{17}$ D. 68

25. Dane są dwa punkty $A(-5,3), B(3,3)$ będące końcami średnicy pewnego koła. Pole tego koła jest równe:
A. 16π B. 4π C. $2\sqrt{2}\pi$ D. 8π

26. Dane są punkty $K(-13,-23)$ oraz $M(11,-23)$. Punkt S dzieli odcinek KM w taki sposób, że stosunek odcinka KS do odcinka SM jest równy $5:3$. Do której ćwiartki układu współrzędnych należy punkt S?
A. ćw. I B. ćw. II C. ćw. III D. ćw. IV

27. Punkty $A(2\sqrt{7},-4)$ i $C(-\sqrt{7},8)$ są końcami przekątnej AC rombu $ABCD$. Środkiem przekątnej BD tego rombu jest punkt o współrzędnych
A. $(1,2)$ B. $\left(\frac{\sqrt{7}}{2},2\right)$ C. $\left(\frac{3\sqrt{7}}{2},-2\right)$ D. $(-1,-2)$

28. Dany jest okrąg o środku w punkcie $O(3,5)$ i promieniu równym 5. Odcinek o końcach $A(6,9)$ i $B(6,1)$ jest cięciwą tego okręgu. Odległość cięciwy AB od środka danego okręgu wynosi:
A. 4 B. 3 C. $2\sqrt{3}$ D. 2,5

29. W układzie współrzędnych na płaszczyźnie danych jest sześć punktów: $A(1,5), B(-5,-3), C(-6,11), D(-34,-1), E\left(\sqrt[3]{-27},4\right), P(-30,76)$. Punkt P leży w tej samej ćwiartce co punkty:

A. $B\ i\ C$ B. $C\ i\ E$ C. $C\ i\ D$ D. tylko C

30. Punkty $A(-1,4)$ i $B(2,0)$ są dwoma wierzchołkami trójkąta równobocznego. Wysokość tego trójkąta ma długość:

A. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Test jest dostępny również w formie interaktywnej pod linkiem:
https://www.liveworksheets.com/xe3424905yi

Przygotowanie do egzaminu maturalnego z matematyki w formule 2023
Wartość bezwzględna

I. Liczby rzeczywiste.

Poziom podstawowy. Zdający:

6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;
7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: $|x + 4| = 55$, $|x - 2| < 3$, $|x + 3| \geqslant 4$.

III. Równania i nierówności.

Poziom podstawowy. Zdający:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny;
2) interpretuje równania i nierówności sprzeczne oraz tożsamościowe;
3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą.

Wartość bezwzględna.

1. Liczba $\left|1-2\sqrt{3}\right|-\left|2-\sqrt{3}\right|$ jest równa:

A. $-1-\sqrt{3}$ B. $3-3\sqrt{3}$ C. $-3+3\sqrt{3}$ D. $1+\sqrt{3}$

2. Jeżeli $x\in(-2,0)$, to wartość wyrażenia $|x-3|-|x+2|-2|x|$ jest równa

A. 1 B. -1 C. 1,5 D. 2

3. Zbiór liczb, których odległość na osi liczbowej od liczby 0 jest równa 2 można opisać równaniem:

A. $|x-2|=2$ B. $|x-2|=0$ C. $|x|=2$ D. $|x+2|=0$

4. Suma odległości na osi liczbowej liczby x od liczby 2 i -4 jest równa 7. Wobec tego x spełnia równanie

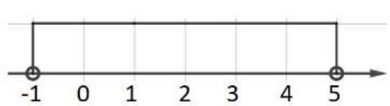
A. $|x+2|+|x-4|=7$ B. $|x+2|+7=|x-4|$

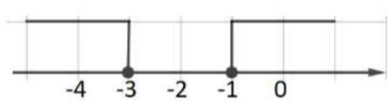
C. $|x-2|+7=|x+4|$ D. $|x-2|+|x+4|=7$

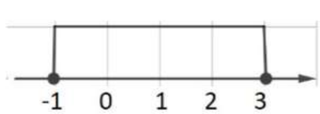
5. Zbiór liczb, których odległość na osi liczbowej od liczby -3 jest nie większa niż 5 można opisać nierównością:

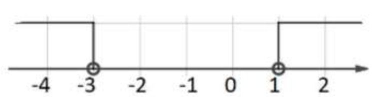
A. $|x+3|<5$ B. $|x+5|\le 3$ C. $|x+3|\le 5$ D. $|x+5|<3$

6. Dopasuj nierówność do jej ilustracji graficznej

1. 

2. 

3. 

4. 

A. $|x+2|<3$

B. $|x+1|\le 2$

C. $|2+x|\ge 1$

D. $|x+1|>2$

E. $|x-1|>2$

F. $|1-x|\le 2$

G. $|x-2|<3$

7. Rozwiąż równanie $|-2x+1|=5$.

8. Rozwiąż równanie $|x+3|=|2x+6|-4$.

9. Rozwiąż równanie $|x+2|+2|x-3|=7$.

10. Oblicz sumę liczb całkowitych spełniających nierówność $|1-2x|\geq 5$.

11. Oblicz iloczyn najmniejszej i największej liczby całkowitej należącej do zbioru rozwiązań nierówności $||x-2|-3|<3$.

12. Rozwiąż nierówność $2\sqrt{x^2+2x+1}+3|x+1|\leq 10$.

Materiał w interaktywnej formie escape roomu dostępny pod linkiem:

https://view.genial.ly/640744250016ea00186aeb23/interactive-content-wartosc-bezwzgledna

Przygotowanie do egzaminu maturalnego z matematyki w formule 2023 Punkty i odcinki w trójkątach, tw. o dwusiecznej kąta w trójkącie.

VII. Planimetria.

Poziom podstawowy. Zdający:

2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;
7) stosuje twierdzenia: Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą;
8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;
9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;
10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;
11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

Punkty i odcinki w trójkątach, tw. o dwusiecznej kąta w trójkącie.

1. Rozważmy trójkąt równoboczny o boku długości $4\sqrt{3}$. Długość jego wysokości wyraża się liczbą z przedziału:

A. (2;3) B. $< 2; 3 >$ C. (4;6) D. $< 4; 6 >$

2. Symetralne boków trójkąta rozwartokątnego ABC przecinają się w punkcie S. Zatem punkt S

A. jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC

B. jest środkiem ciężkości trójkąta ABC

C. jest równo odległy od punktów A, B, C

D. należy do najdłuższego boku trójkąta ABC

3. Jaka jest długość okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o obwodzie $18\sqrt{3}$cm?

A. $6\sqrt{3}$ cm B. 6π cm C. $12\sqrt{3}$ cm D. 12π cm

4. W trójkącie ABC miara kąta przy wierzchołku A wynosi 90° i środkowa AD ma długość $10\sqrt{2}$. Pole koła opisanego na tym trójkącie wynosi

A. 10π B. 100π C. 200π D. 400π

5. Jeżeli w trójkącie tylko jedna dwusieczna kąta zawiera się w symetralnej boku, to jest to trójkąt

A. równoboczny B. prostokątny C. równoramienny D. rozwartokątny

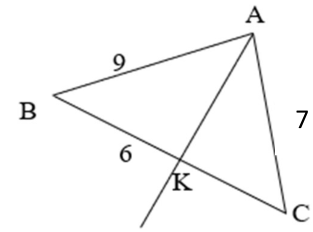
6. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości $\frac{3}{2}$ i 2. Najkrótsza wysokość w tym trójkącie wynosi

A. 1 B. $\frac{6}{5}$ C. 2 D. $\frac{5}{2}$

7. W trójkącie prostokątnym z wierzchołka kąta prostego opuszczono wysokość. Spodek tej wysokości dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości 6,4 i 2,5. Ile wynosi długość tej wysokości?

A. 4 B. 16 C. 3,9 D. 6,8

8. Dany jest trójkąt ABC. Półprosta AK jest dwusieczną kąta przy wierzchołku A.



Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A. albo B. oraz jej uzasadnienie 1. albo 2.

Długość boku BC wynosi

A. 10,5	ponieważ z twierdzenia o dwusiecznej kąta wynika, że:	1. $\frac{9}{6}=\frac{\lvert BC\rvert}{7}$
B. $10\frac{2}{3}$		2. $\frac{7}{9}=\frac{\lvert KC\rvert}{6}$

9. Środkiem ciężkości trójkąta równobocznego ABC jest punkt P. Wiadomo, że |AP|=4.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A. albo B. oraz jej uzasadnienie 1. albo 2.

Wysokość trójkąta ABC ma długość

A. 6	ponieważ z twierdzenia o przecięciu się środkowych i własności trójkąta równobocznego wynika, że:	1. $\lvert AP\rvert=\frac{2}{3}h$
B. 8		2. $\lvert AP\rvert=\frac{1}{2}h$

10. W każdym trójkącie można wyszczególnić tzw. punkty szczególne.

Oceń, czy poniższe stwierdzenia są prawdziwe. Zaznacz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

W dowolnym trójkącie punkt przecięcia się środkowych nazywamy barycentrum	P	F
W dowolnym trójkącie punkt przecięcia się wysokości nazywamy ortocentrum	P	F
W dowolnym trójkącie punkt przecięcia się dwusiecznych kątów wewnętrznych jest środkiem ciężkości	P	F
W dowolnym trójkącie punkt przecięcia się symetralnych boków jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt	P	F

11. W trójkącie ABC kąty wewnętrzne przy wierzchołkach A i B mają miary odpowiednio 32° i 108°. Dwusieczne jego kątów wewnętrznych dzielą go na sześć trójkątów.

Oceń, czy poniższe stwierdzenia są prawdziwe. Zaznacz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wszystkie tak wyznaczone trójkąty są przystające.	P	F
Jeden z tak wyznaczonych trójkątów ma kąty wewnętrzne o miarach 52°, 54°, 74°.	P	F

Wszystkie tak wyznaczone trójkąty mają jednakowe pola	P	F
Wśród tak wyznaczonych trójkątów są trójkąty rozwartokątne	P	F

12. Rozważamy trójkąt T o obwodzie 20 i polu $10\sqrt{3}$.

12.1. Z jednego z wierzchołków trójkąta T poprowadzono środkową, która podzieliła go na dwie części T_1 i T_2.

Uzupełnij zapis – wpisz w miejscu wykropkowanym odpowiednią wartość.

Pole figury T1 wynosi………………..

12.2. W trójkąt T wpisano okrąg.

Uzupełnij zapis – wpisz w miejscu wykropkowanym odpowiednią wartość.

Promień tego okręgu ma długość……………………..

13. O pewnym trójkącie wiadomo, że jest prostokątny i jego pole wynosi 30. Okrąg opisany na tym trójkącie ma promień 7,5. Wyznacz wysokość tego trójkąta opuszczoną na przeciwprostokątną.

14. W trójkąt prostokątny wpisano okrąg. Punkt styczności podzielił przeciwprostokątną na odcinki długości 4 cm i 6 cm. Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.

15. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 10 i 24. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczna kąta prostego dzieli jego przeciwprostokątną.

16. W trójkąt ABC wpisano okrąg o środku O. Wiadomo, że kąty wewnętrzne trójkąta AOB mają miary 25° i 35°. Wyznacz miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC.

17. Środkowe w trójkącie równoramiennym mają długości $12, 12$ oraz 3. Oblicz długości boków tego trójkąta.

18. W trójkącie ABC poprowadzono środkowe AD, BE, CF. Punkt przecięcia środkowych oznaczono S, natomiast punkt przecięcia się odcinków AD i EF oznaczono M. Wyznacz stosunek długości odcinków MS i AD.

19. Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny o przyprostokątnych długości $3\sqrt{2}$. Oblicz odległość jego środka ciężkości od wierzchołka kąta prostego.

20. W trójkącie równoramiennym ABC, boki AB i BC są równej długości, a suma długości ramienia AC i wysokości CD wynosi 9. Kąt przy podstawie ma miarę 30°. Oblicz długość środkowej poprowadzonej na bok BC.

Quiz matematyczny „Trójkąty” dostępny jest pod linkiem:

https://view.genial.ly/641fd1397a7e9f0019a17459/interactive-content-trojkaty

Przygotowanie do egzaminu maturalnego z matematyki w formule 2023 Funkcje i ich własności.

Poziom podstawowy.

Zdający:

1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach);
2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;
3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;
4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;
5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;
6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach;
7) szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem;
8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);
9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;
10) wyznacza największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
11) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym;
12) na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y=f(x-a)$, $y=f(x)+b$, $y=-f(x)$, $y=f(-x)$;
13) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Poziom rozszerzony.

Zdający spełnia wymagania określone dla poziomu podstawowego, a ponadto:

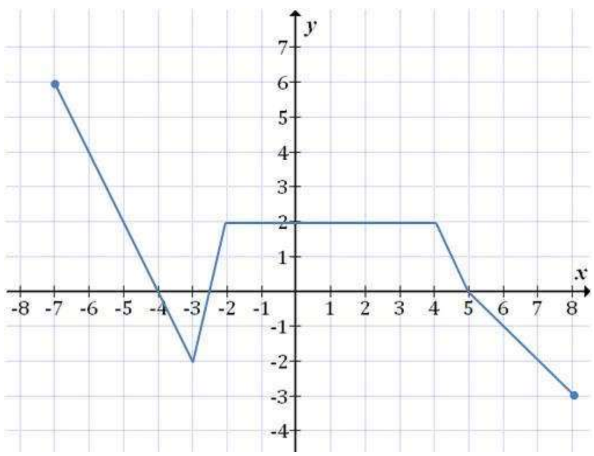
1) na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ rysuje wykres funkcji $y=|f(x)|$.

1. Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{3x^5}{x^{10}+1}$.

Zapisz w miejscu wykropkowanym wartość funkcji f dla argumentu $x=-\sqrt[5]{4}$.

………………………………………………………………………………………

2. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.

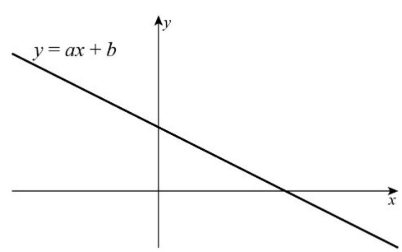


Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F jeśli zdanie jest fałszywe.

1.	Iloczyn $f(-3)\cdot f(1)\cdot f(8)$ jest równy (-12).	P	F
2.	Funkcja jest rosnąca w przedziale $[-2,2]$.	P	F

3. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji liniowej określonej wzorem $y=ax+b$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F jeśli zdanie jest fałszywe.



1.	Współczynnik a jest dodatni.	P	F
2.	Współczynnik b jest ujemny.	P	F

4. Punkt $\left(\frac{1}{4},-2\right)$ należy do wykresu funkcji liniowej $f(x)=4x+b$.

Zapisz wzór funkcji f w miejscu wykropkowanym.

……………………………………………………………………………………………

5. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej liczbę przeciwną do jej kwadratu.

5.1. Zapisz w miejscu wykropkowanym wzór funkcji f.

……………………………………………………………………………………………

5.2. Naszkicuj wykres funkcji *f*.

6. Funkcja kwadratowa $f(x) = -x^2 + bx + c$ nie ma miejsc zerowych.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Współczynniki b oraz c we wzorze funkcji spełniają zależność:

A.	$-1+c>b$	ponieważ	1.	$f(-1)>0$
B.	$-1+c<b$		2.	$f(-1)<0$
C.	$-1+c=b$		3.	$f(-1)=0$

7. Funkcja kwadratowa jest określona wzorem $f(x)=x^2-6x-4$ w przedziale $[1,4]$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F jeśli zdanie jest fałszywe.

1.	Największa wartość funkcji f w przedziale $[1,4]$ jest równa (-9).	P	F
2.	Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $[1,4]$ jest równa (-12).	P	F

8. Wykresem funkcji kwadratowej $f(x)=4x^2+bx+c$ jest parabola o wierzchołku w punkcie $W(-2,3)$.

Dokończ zdanie. Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

Wzór tej funkcji to

A. $f(x)=4(x-2)^2+3$

B. $f(x)=4(x+2)^2+3$

C. $f(x)=4(x-2)^2-3$

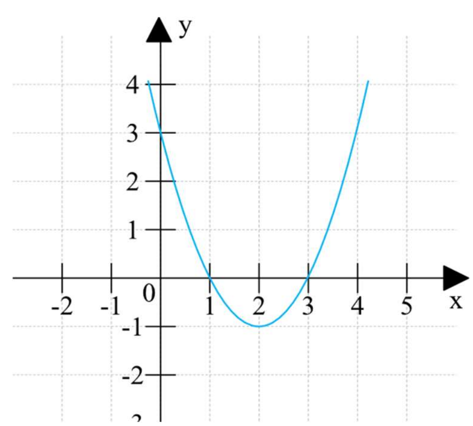
D. $f(x)=4(x+2)^2-3$

E. $f(x)=4x^2-16x+19$

F. $f(x)=4x^2+16x+19$

G. $f(x)=4x^2+16x+13$

9. Na rysunku przedstawiono fragment pewnej paraboli. Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $(2,-1)$.



Dokończ zdanie. Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

Osią symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu

A. $x=2$

B. $y=2$

C. $x=-1$

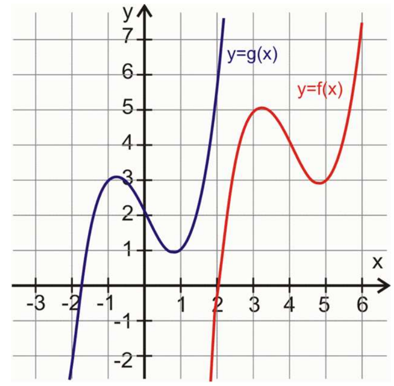
D. $y=-1$

E. $x-2=0$

F. $y-2=0$

G. $x+1=0$

10. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji f i g.



Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Funkcję g opisuje wzór:

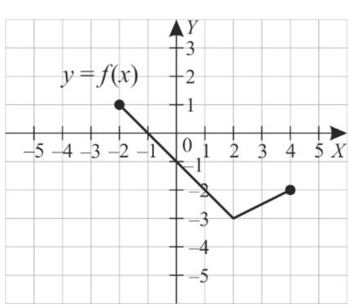
A.	$g(x)=f(x+4)-2$	ponieważ	1.	wykres funkcji f został przesunięty równolegle o 4 jednostki w lewo i 2 jednostki w dół
B.	$g(x)=f(x-4)+2$		2.	wykres funkcji f został przesunięty równolegle o 4 jednostki w prawo i 2 jednostki w górę
C.	$g(x)=f(x-4)-2$		3.	wykres funkcji f został przesunięty równolegle o 4 jednostki w prawo i 2 jednostki w dół

11. Skala Richtera służy do określania siły trzęsień ziemi. Siła ta opisana jest wzorem $R=\log\frac{A}{A_0}$, gdzie A oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, $A_0=10^{-4}$ cm jest stałą nazywaną amplitudą wzorcową.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F jeśli zdanie jest fałszywe.

1.	Jeśli trzęsienie ziemi ma siłę 7 w skali Richtera, to amplituda trzęsienia jest równa 1000 cm.	P	F
2.	Jeśli amplituda trzęsienia jest równa 100 cm, to trzęsienie ziemi ma siłę 5,9 w skali Richtera.	P	F

12. Korzystając z wykresu funkcji y=f(x) na poniższym rysunku naszkicuj wykres funkcji $y=|f(x)|$.



Odpowiedzi i wskazówki do zadań

Geometria analityczna:

z.1	z.2	z.3	z.4	z.5	z.6	z.7	z.8	z.9	z.10
D	**D**	**A**	**C**	**D**	**C**	**A**	**C**	**B**	**C**
z.11	z.12	z.13	z.14	z.15	z.16	z.17	z.18	z.19	z.20
A	**D**	**C**	**C**	**A**	**D**	**A**	**D**	**D**	**A**
z.21	z.22	z.23	z.24	z.25	z.26	z.27	z.28	z.29	z.30
A	**A**	**B**	**C**	**A**	**D**	**B**	**B**	**B**	**A**

Wartość bezwzględna

Zadanie 1. Odp. C

Zadanie 2. Odp. A

Zadanie 3. Odp. C

Zadanie 4. Odp. D

Zadanie 5. Odp. C

Zadanie 6. 1G, 2C, 3F, 4D

Zadanie 7. Odp. $x=-2, x=3$

Zadanie 8. Odp. $x=-7, x=1$

Zadanie 9. Odp. $x=1, x=\frac{11}{3}$

Zadanie 10. Odp. -2

Zadanie 11. Odp. -21

Zadanie 12. Odp. $x \in [-3,1]$

Punkty i odcinki w trójkątach, tw. o dwusiecznej kąta w trójkącie.

z.1	z.2	z.3	z.4	z.5	z.6	z.7	z.8
D	C	D	C	C	B	A	B.2.
z.9	z.10	z.11	z.12.1	z.12.2	z.13	z.14	z.15
A.1.	PPFF	FPFP	$5\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	4	6 i 8	$7\frac{11}{17}$ i $18\frac{6}{17}$
z.16	z.17	z.18	z.19	z.20			
50°, 60°,70°	$6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}$, $6\sqrt{7}$	$\frac{1}{6}$	2	$3\sqrt{7}$			

Funkcje i ich własności

Rozwiązania:

Zadanie 1. $f\left(-\sqrt[5]{4}\right)=-\frac{12}{17}$

Komentarz

$$f\left(-\sqrt[5]{4}\right)=\frac{3\cdot\left(-\sqrt[5]{4}\right)^5}{\left(-\sqrt[5]{4}\right)^{10}+1}=\frac{3\cdot(-4)}{16+1}=-\frac{12}{17}$$

Zadanie 2. FF

Komentarz

1. $f(-3)\cdot f(1)\cdot f(8)=-2\cdot 2\cdot(-3)=12$

2. Funkcja jest rosnąca w przedziale $[-3,-2]$.

Zadanie 3.FF

Komentarz

Funkcja jest malejąca, zatem $a<0$.

Wykres przecina oś *y* powyżej osi *x,* zatem $b>0$.

Zadanie 4. $f(x)=4x-3$

Komentarz

$$-2=4\cdot\frac{1}{4}+b$$
$$-2=1+b$$
$$b=-3$$

Zadanie 5.1. $f(x)=-x^2,\ x\in R$

Zadanie 5.2. wykres

Zadanie 6. B2

Komentarz

Funkcja nie ma miejsc zerowych i ramiona paraboli są skierowane do dołu, zatem wszystkie wartości funkcji są ujemne.

$$f(-1)=-(-1)^2+b\cdot(-1)+c$$
$$f(-1)=-1-b+c$$

Ponadto $f(-1)<0$

$$-1-b+c<0$$
$$-1+c<b$$

Zadanie 7.PF

Komentarz

$$f(x)=x^2-6x-4$$
$$p=-\frac{-6}{2}=3$$
$$3\in[1,4]$$
$$f(3)=9-18-4=-13$$
$$f(1)=1-6-4=-9$$
$$f(4)=16-24-4=-12$$

Wartość największa funkcji f w przedziale $[1,4]$ jest równa (-9), a najmniejsza (-13)

Zadanie 8. BF

Komentarz

$$f(x)=4x^2+bx+c,\ W(-2,3)$$
$$f(x)=4(x+2)^2+3$$
$$f(x)=4(x^2+4x+4)+3$$
$$f(x)=4x^2+16x+16+3$$
$$f(x)=4x^2+16x+19$$

Zadanie 9. AE

Zadanie 10. A1

Zadanie 11. PF

Komentarz

1. $R=7$

Podstawiamy do wzoru i otrzymujemy:

$$7=\log\frac{A}{10^{-4}}$$
$$\frac{A}{10^{-4}}=10^7$$
$$A=10^3$$
$$A=1000\ \text{cm}$$

2. $A=100$ cm

Podstawiamy do wzoru i otrzymujemy:

$R = \log\frac{100}{10^{-4}}$

$10^R = \frac{10^2}{10^{-4}}$

$10^R = 10^6$

$R = 6$

Zadanie 12. wykres

Literatura:

Zadania umieszczone w powyższej publikacji to w zdecydowanej większości materiały autorskie, stworzone w ramach działania sieci współpracy nauczycieli matematyki szkół ponadpodstawowych w roku szkolnym 2022/2023 przy udziale doradcy metodycznego. W ramach tej działalności powstały testy, interaktywne quizy, escape room zawierające zestawy powtórzeniowe z wybranych działów zgodnie z wymaganiami egzaminacyjnymi obowiązującymi w nowej formule od 2023 r. Treści zadań powstały na wzór zadań z poniżej podanych pozycji wydawniczych lub zostały bezpośrednio zaczerpnięte.

1) E. Świda, E. Kurczab, M. Kurczab, M. Przeniosło, Powtórka przed maturą. Matematyka. Zadania. Oficyna Wydawnicza Krzysztof Pazdro.
2) Praca zbiorowa pod redakcją A. Cewe i H. Nahorskiej, Matura z matematyki od roku 2010.
3) W. Babiański , L. Chańko , J. Czarnowska , B. Mojsiewicz, J. Wesołowska, Teraz matura. Matematyka. Zbiór zadań i zestawów maturalnych. Poziom podstawowy. Nowa Era.
4) W. Babiański, L. Chańko, J. Janowicz, D. Ponczek, K. Wej, MATeMAtyka 1, Nowa Era.
5) Arkusze maturalne (również matur próbnych Operon, Nowa Era i CKE) od 2015 roku.
6) Mateusz Wróbel, Wykuj swój sukces. Zbiór zadań testowych do matury z matematyki dla poziomu podstawowego. Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2019.